

LNf - 62/6

G. Garolla: STUDIO DI UN SISTEMA OTTICO CON GRANDE
ACCETTANZA IN ENERGIA ED IN ANGOLO.

Nota interna: n° 113
5 Febbraio 1962

LNF-62/6

Nota interna: n° 113
5 Febbraio 1962

G. Garolla: STUDIO DI UN SISTEMA OTTICO CON GRANDE ACCETTANZA IN ENERGIA ED IN ANGOLO.

1) - Generalità

Il problema del foccheggiamento di fasci di particelle mediante campi magnetici viene spesso notevolmente complicato da richieste particolari, come ad esempio piccola dimensione del "beam" in uscita, grande accettazione in angolo od in energia, sia perchè possono cadere alcune ipotesi della teoria lineare, sia per la difficoltà di realizzare l'andamento di campo voluto su grandi dimensioni, sia perchè, per un dato canale, le varie richieste possono condurre a condizioni contraddittorie.

Vogliamo qui vedere quale sia, per particelle di massa elettronica, il sistema migliore per ottenere grandi accettanze in energia ed in angolo senza alterare la direzione del fascio, nella regione dei 10 ± 20 MeV.

Le soluzioni possibili sono sostanzialmente due: lenti quadrupolari e lenti a simmetria di rivoluzione o lenti

a mantello, e le principali differenze che si possono riscontrare sono le seguenti:

1 - Per accettare grandi angoli occorre realizzare piccole distanze focali, cioè costruire lenti molto forti, il che comporta, per quadrupoli, magneti molto corti e poco distanziati affinché il fascio non diverga eccessivamente nel piano defoccheggiante della prima lente, e la seconda non abbia quindi un'apertura eccessiva. In queste condizioni perde valore l'approssimazione gaussiana, e predominano i termini d'aberrazione.

Per lenti a mantello, invece, non essendovi nessuna sezione defoccheggiante, l'apertura può essere ridotta a valori ragionevoli.

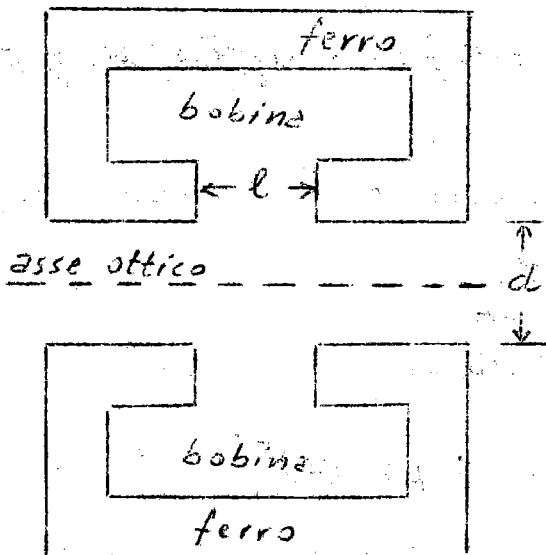
2 - Sempre per avere forti convergenze, si ha, per quadrupoli, una sezione del fascio fortemente ellittica, mentre con lenti a mantello la sezione del "beam" è sempre circolare.

3 - Per quadrupoli, detta f la distanza focale e p il momento longitudinale delle particelle, si ha in prima approssimazione $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta p}{p}$, relazione che limita l'accettanza in energia, mentre nel secondo caso si può ottenere $\frac{\Delta f}{f} < \frac{1}{15} \frac{\Delta p}{p}$, cioè una maggior banda di impulsi può venire raccolta.

Per motivi su esposti s'è ritenuto opportuno studiare il comportamento delle lenti di rivoluzione, normalmente usate in microscopia elettronica, per energie più alte. Si è innanzi tutto costituito un modello della lente in vasca elettrolitica per verificare l'andamento della componente assiale dell'induzione: i risultati sono riportati nel grafico, confrontati con la curva di Glaser

$$B_z(z) = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}$$

ove a , valore di z per cui $B_z(a) = \frac{1}{2} B_0$ è stato dedotto dalla curva sperimentale.



Entro gli errori sperimentali vale la

$$\frac{2a}{d} = 1 \text{ per } \frac{l}{d} = 0,9$$

che lega la larghezza della campana (a semialtezza) con le dimensioni geometriche del traferro, in perfetto accordo con i risultati di Grivet.

L'andamento dell'induzione assiale non è esattamente

quello di Glaser, ma la quantità $\int_{-\infty}^{+\infty} B_z^2 dz$ non varia in misura notevole. Si ha infatti, nel piano mediano mobile, $r'' = AB_z^2 r$, da cui ponendo $r = r_0$ nell'attraversare il campo (cioè nell'ipotesi di lente infinitamente sottile) e integrando

$$\frac{r' - r_0'}{r_0} = A \int_{-\infty}^{+\infty} B_z^2 dz$$

e, per incidenza parallela all'asse ($r_0' = 0$)

$$\frac{1}{f} = \frac{r'}{r_0} = A \int_{-\infty}^{+\infty} B_z^2 dz$$

Abbandonando l'ipotesi di lente sottile le formule saranno ovviamente più complicate, ma l'integrale di B_z^2 resterà sempre il fattore principale nella determinazione della distanza focale. Le misure in vasca elettrolitica ci consentono così di usare la formula di Glaser, particolarmente comoda nel calcolo dei parametri gaussiani e dei coefficienti di aberrazione della lente.

2) - Teoria lineare.

Nell'ipotesi di campo di Glaser l'equazione del moto al prim'ordine può essere integrata esattamente e si trova

$$r = \sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} \left[A \sin(\sqrt{1+k^2} \operatorname{arccotg} \frac{z}{a}) + B \cos(\sqrt{1+k^2} \operatorname{arccotg} \frac{z}{a}) \right]$$

ove K è un parametro caratteristico della lente, definito come

$$K = \frac{C B_0 a}{2\beta E_{tot}}$$

con C , B_0 , a misurate in M.KS ed

$$E_{tot} = m_0 c^2 (\sqrt{1-\beta^2})^{-1} \text{ in eV.}$$

In tutte queste formule l'origine delle coordinate è posta nel centro del magnete.

Consideriamo un raggio che arrivi parallelo all'asse: per esso si dovrà porre $B \equiv 0$ perchè la traiettoria all'infinito si mantenga limitata: esso intersecherà l'asse per

$$|\bar{z}| = a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}$$

per cui i fuochi si troveranno nei punti di coordinate $\pm \bar{z}$. La distanza dei fuochi dai rispettivi piani principali si otterrà dalla

$$f = \frac{r(z=\infty)}{r'(z=\infty)} = \frac{a}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}}$$

ed i piani principali disteranno dall'asse di

$$S = f - |\bar{z}| = a \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}} - \left| \operatorname{cotg} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}} \right| \right)$$

Per verificare se i punti cardinali così trovati han

no il consueto significato, se cioè è corretto applicare la relazione di coniugazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

usando i valori su calcolati per le coordinate dei fuochi e dei piani principali, calcoleremo dall'equazione del moto la matrice di trasferimento tra due punti generici Z_0 e Z_1 ed imporremo la condizione $A_{12}(Z_0, Z_1) = 0$.

Infatti si abbia:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(Z_0, Z_1) & A_{12}(Z_0, Z_1) \\ A_{21}(Z_0, Z_1) & A_{22}(Z_0, Z_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_0' \end{pmatrix}$$

da cui

$$r_1 = A_{11} r_0 + A_{12} r_0'$$

allora, volendo avere $r_1 = 0$ per $r_0 = 0$, cioè Z_0 e Z_1 punti coniugati, bisognerà imporre $A_{12} = 0$. Riprendendo l'equazione del modo

$$r = f(A\alpha + B\beta)$$

$$r' = \frac{1}{af} \left[A \left(\frac{z}{a} \alpha - 2\beta \right) + B \left(\frac{z}{a} \beta + 2\alpha \right) \right]$$

ove

$$\alpha = \text{sen} \left(\sqrt{1+k^2} \arctan \frac{z}{a} \right)$$

$$\beta = \text{cos} \left(\sqrt{1+k^2} \arctan \frac{z}{a} \right)$$

ed A e B sono costanti d'integrazione, riscrivendole per $Z = Z_0$, si può esprimere A e B in funzione delle condizioni iniziali r_0 ed r_0'

$$A = h_1 r_0 + k_1 r_0'$$

$$B = h_2 r_0 + k_2 r_0'$$

$$h_1 = \frac{1}{\alpha_0 \gamma_0} - 2 \gamma_0 \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} + \gamma_0 \frac{z_0}{a} \frac{\beta_0}{\alpha_0} \quad K_1 = -\frac{a}{2} \beta_0 \gamma_0$$

$$h_2 = \frac{2}{\gamma_0} \frac{\beta_0}{\alpha_0} - \frac{1}{\gamma_0} \frac{z_0}{a} \quad K_2 = \frac{a}{2} \alpha_0 \gamma_0$$

Sostituendo i valori di A e B così trovati si ha per $Z=Z_i$

$$\bar{r}_i = \gamma (\alpha_i h_1 + \beta_i h_2) \bar{r}_0 + \gamma (\alpha_i K_1 + \beta_i K_2) \bar{r}'_0$$

$$\begin{aligned} \bar{r}'_i = \frac{1}{\alpha_i \gamma_i} \left[h_1 \left(\frac{z_i}{a} \alpha_i - 2\beta_i \right) + h_2 \left(\frac{z_i}{a} \beta_i + 2\alpha_i \right) \right] \bar{r}_0 + \\ + \frac{1}{\alpha_i \gamma_i} \left[K_1 \left(\frac{z_i}{a} \alpha_i - 2\beta_i \right) + K_2 \left(\frac{z_i}{a} \beta_i + 2\alpha_i \right) \right] \bar{r}'_0 \end{aligned}$$

da cui

$$A_{12}(z_0, z_i) = \frac{a}{2} \gamma_i \gamma_0 (\alpha_0 \beta_i - \alpha_i \beta_0) = 0$$

Ricordando il significato di α_0 , α_i , β_0 , β_i , si ha

$$\operatorname{sen} \left[\sqrt{1+k^2} \left(\operatorname{arccot} \frac{z_0}{a} - \operatorname{arccot} \frac{z_i}{a} \right) \right] = 0$$

$$\operatorname{sen} \left[\sqrt{1+k^2} \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{a} \frac{z_0 z_i + a^2}{z_i - z_0} \right) \right] = 0$$

scartando l'ovvia soluzione $Z_i = Z_0$ si ha

$$\sqrt{1+k^2} \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{a} \frac{z_0 z_i + a^2}{z_i - z_0} \right) = -\pi$$

$$\frac{z_0 z_i + a^2}{z_i - z_0} = a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}} = -s \quad (s \geq 0 \text{ per } 0 \leq k^2 \leq 3)$$

Definendo ora

$$q = z_i + s \quad p = -z_0 + s \quad \text{e sostituendo}$$

nella relazione di coniugazione, si ottiene

$$pq = (p+q)(s+s) - (s^2 + 2sd + a^2) = 0$$

Questa coincide con la formula che lega oggetto e immagine in una lente sottile purchè si ponga

$$s + s' = f \quad s'^2 + 2s's - a^2 = 0 \quad \text{da cui}$$

$$s = a \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}} \pm \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}} \right) \quad f = \frac{a}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}}$$

Si è così visto che i punti cardinali già trovati sono corretti, e che una lente a mantello si può considerare una lente lineare di cui sono calcolabili tutti i parametri caratteristici.

Per una tale lente si può trovare l'espressione della matrice di trasferimento, considerando uno spazio senza campo a sinistra del primo piano principale, una lente sottile di convergenza $-1/f$ che trasferisce tra i due piani, ed un'altro spazio senza campo a destra del secondo piano principale

$$M = \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove

l_1 e l_2 sono le distanze misurate dal primo al secondo piano principale rispettivamente. Tra due punti coniugati si ha, in particolare

$$M = \begin{pmatrix} -G & 0 \\ -\frac{1}{f} & -\frac{1}{G} \end{pmatrix}$$

ove $G = \frac{q}{p}$ ha il significato di ingrandimento tra piani coniugati.

3) - Le aberrazioni.

Per poter seguire correttamente l'andamento del fa-

scio bisogna stimare quantitativamente l'effetto delle aberrazioni. Trascurando le aberrazioni derivanti da imperfezioni meccaniche, cosa lecita se la lavorazione della gap è precisa a meglio di 0,2 mm, restano le aberrazioni del terz'ordine e l'aberrazione cromatica le prime discendono dal fatto che si è considerato solo il primo termine dello sviluppo in serie dell'induzione radiale, mentre la seconda dipende dal fatto che f è funzione del momento assiale. Consideriamo prima l'aberrazione cromatica come si vede dalla formula f varia con l'energia attraverso il fattore K^2 cioè la lente è cromatica. Tale cromatismo è però facilmente minimizzabile lavorando in condizioni tali da avere $\frac{\partial f}{\partial K^2} = 0$, condizione verificata per $K^2 = 3$ e $f = f_{\text{minimo}} = a$. In queste condizioni si verifica che per $\frac{\Delta E}{E} \approx 15\%$ si ha $\frac{\Delta f}{f} \leq 1\%$.

Per energie relativistiche ($\beta < 1$) K^2 dipende da a , B_0 ed E_{tot} , inoltre B_0 non può variare oltre un certo limite superiore a causa della saturazione del ferro quindi per lavorare in condizioni di massimo acromatismo sarà necessario aumentare l'apertura della gap al crescere dell'energia. Ad esempio, per $B = 1 \text{ Wb/m}^2$ il rapporto a/E_{tot} deve valere 1,2 cm/MeV. Una variazione di f comporterà una variazione di q , cioè il fascio convergerà in una zona larga $\pm \Delta y$, e quindi nel punto coniugato una sorgente puntiforme avrà un'immagine circolare. Valuteremo il valore ρ_1 del raggio di tale cerchio come

$$\rho_1 = |r'_i \Delta y|$$

trascurando i termini d'ordine superiore.

Ricordando che $r'_i = -\frac{r_0}{f} - \frac{r'_0}{G}$

$$q = (G+z)f \quad \rho = \frac{G+z}{G} f$$

segue:

$$\left| \frac{\Delta q}{q} \right| = \frac{p}{p \cdot f} \left| \frac{\Delta f}{f} \right| = (G+1) \left| \frac{\Delta f}{f} \right|$$

$$|\Delta q| = (G+2)^2 \Delta f$$

$$\rho_1 = \left[\frac{(G+1)^2}{f} r_0 + \frac{(G+2)^2}{G} r_0' \right] \Delta f$$

Rimane ora da vedere l'allargamento dell'immagine dovuto alle aberrazioni di campo, data la piccola estensione della sorgente sarà sufficiente calcolare il solo coefficiente d'aberrazione di sfericità, l'unico termine al terzo ordine che non sia proporzionale alla dimensione trasversa dell'oggetto o alle sue potenze superiori. La sfericità fa sì che in luogo dell'immagine gaussiana si abbia, centrata su di essa, una macchina di raggio

$$r_2 = A (r_0')^3$$

ove A è il coefficiente d'aberrazione di sfericità

$$A = \frac{G}{16} \int_{z_0}^{z_i} X^4 \left[\frac{e^2 c^2 B'^2}{2\beta^2 E_{tot}^2} + \frac{3}{2} \frac{e^4 c^4 B^4}{\beta^4 E_{tot}^4} - \frac{e^2 c^2}{2\beta^2} \frac{B^2}{E_{tot}^2} \left(\frac{X'}{X} \right)^2 \right] dz$$

ove $X = X(Z)$ è la traiettoria gaussiana che parte da $Z=z_0$ con $r_0 = 0$ e $r_0' = I$.

Per semplificare il calcolo maggioriamo l'aberrazione approssimando $X(Z)$ con due seguenti partenti dai punti coniugati e terminati all'incrocio con il piano principale oggetto

$$\left. \begin{aligned} X &= X_I = Z + Z_0 \\ X' &= X'_I = I \end{aligned} \right\} \text{ per } Z_0 \leq Z \leq Z_{\pi_1}$$

$$\left. \begin{aligned} X = X_2 = X_2' / (G - X) &= -\frac{1}{G} (X_2 - X) \\ X' = X_2' &= -\frac{X_2'}{G} = -\frac{1}{G} \end{aligned} \right\} \text{ per } Z_{\pi_1} \leq Z \leq Z_2$$

In questa ipotesi si trova per $E_{\text{tot}} = 10 \text{ MeV}$,
 $G = 7$, $K^2 = 3$, $A = 0,057 \text{ G}$, $\rho_2 = 0,057 r_0^3 \text{ G}$,
 che si può approssimativamente estendere per valori di G non troppo diversi da 7. Il valore di A è in pratica un limite per r_0 , se si vuole avere una piccola dimensione in uscita: infatti, imponendo $\rho_2 \leq 2 \text{ mm}$ si trova $r_0 \leq 0,176 = \text{tg } 10^\circ$, sempre per i valori di E_{tot} , G e K^2 prima fissati.

4) - Conclusione.

Questo tipo di lente è stato studiato per ottenere intensi fasci di positroni ad alte energie. Si pensa infatti di produrre i positroni bombardando una targetta opportuna con elettroni ad energia relativamente bassa (dell'ordine di 30 MeV) e successivamente accelerare i positroni prodotti con un linac fino all'energia voluta.

Ovviamente, per avere grandi intensità bisognerà raccogliere il maggior numero possibile dei positroni prodotti nel processo, e quindi necessita interporre tra il convertitore ed il linac un sistema ottico che assolva queste funzioni.

Inoltre, dato che il diametro utile dei linac mm supera i 2 cm, bisognerà avere, in uscita, un fascio di dimensioni piuttosto piccole. Ad esempio, riuscendo ad ottenere una sorgente di positroni di raggio $r_0 = 0,5 \text{ mm}$ ed accettando angoli fino a 10 gradi si ha in uscita, per $G = 7$, $E_{\text{tot}} = 10 \text{ MeV}$ $K^2 = 3$ un fascio di raggio massimo $r = 6 \text{ mm}$ e divergenza massima $r' = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$.

tenendo conto delle aberrazioni. Un fascio simile può venire accettato da un linac a patto di produrre in esso un campo magnetico assiale sufficientemente elevato (circa 3 Kgs).

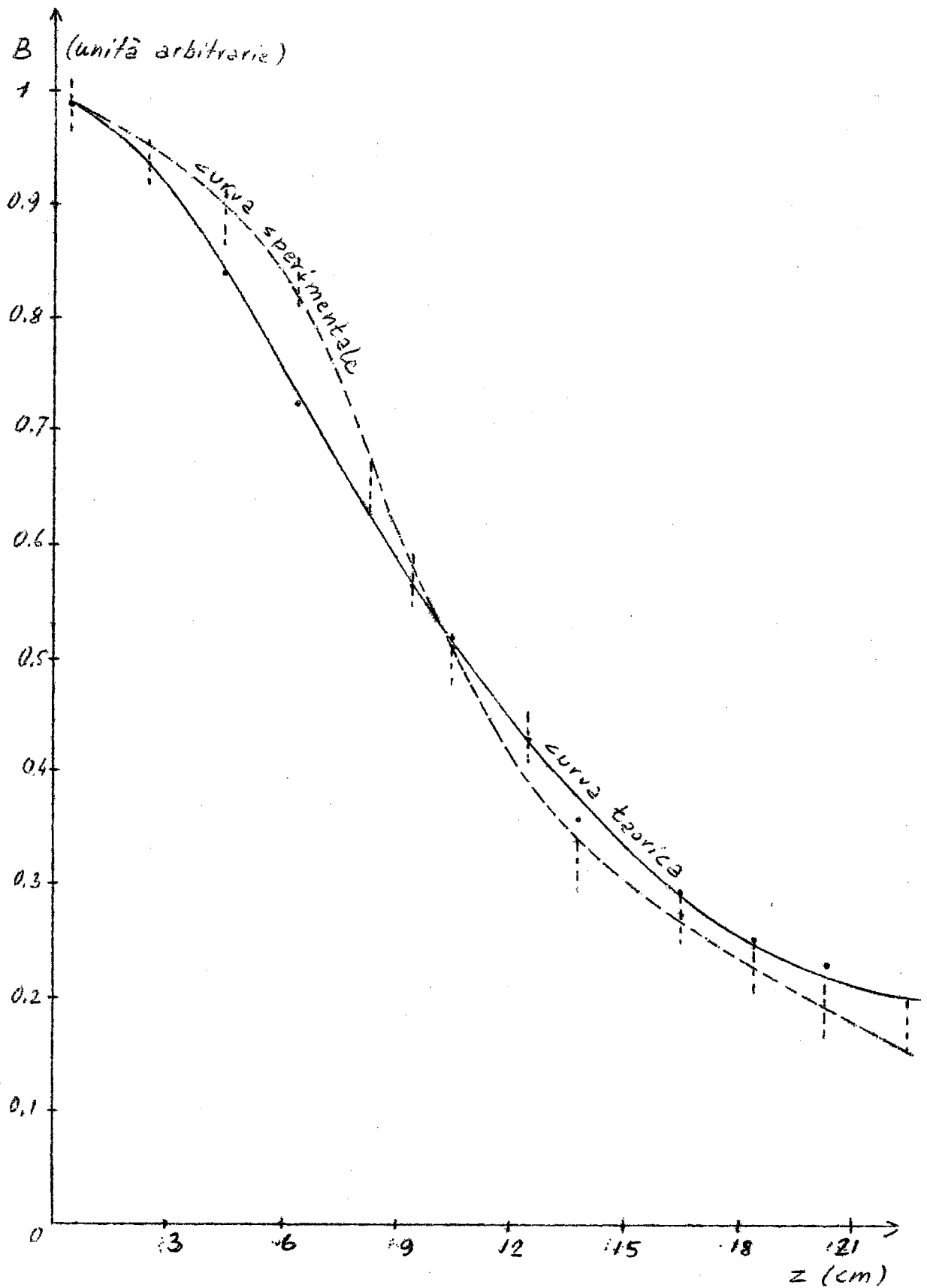
Accettando angoli di 10° ed energie del 15% diverse dalla media è lecito aspettare un rendimento di conversione dell'ordine di $2 \cdot 10^{-4(I)}$ per elettroni da 30 MeV e positroni da 10 MeV. Accelerando così 0,5 ampères di elettroni a 30 MeV con un primo linac sembra possibile ottenere, con quest'ottica, una corrente di 100 μ A di positroni ad alta energia.

Bibliografia.

(I) - L. Katz, Nuclear Instruments and Methods II (1961)
7-13.

P. Grivet: Optique Electronique - Bordas Lille, 1955

H. Bruck: Optique Corpusculaire - CEN, Saclay.



ANDAMENTO DELL'INDUZIONE ASSIALE IN UNALENTE A MANTELLO. LA CURVA PIENA E' QUELLA TEORICA CON $a = 11$ cm RICAVATO DALLA CURVA SPERIMENTALE (nel modello $d = 22$ cm, $l = 20$ cm).